Übungsklausur Analysis & Geometrie (Medikament)

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Berechne die erste Ableitung.

a) $f(x) = 4x + \cos(x^2)$ b) $f(x) = e^{5x-1} \cdot \sin(3x)$ (4VP)

2) Berechne und vereinfache.

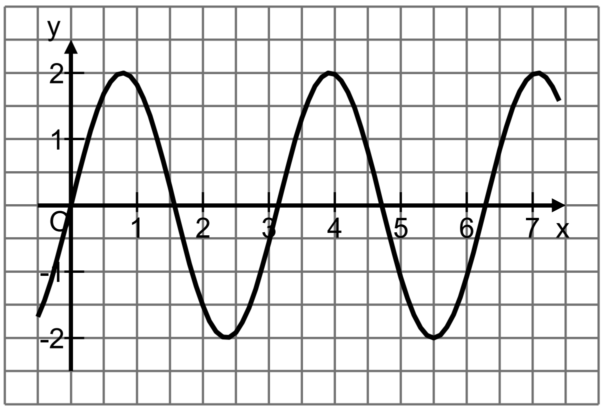
a) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx$ b) $\int_{6}^{7} \frac{2}{x-5} dx$ (4VP)

3) Löse die Gleichung.

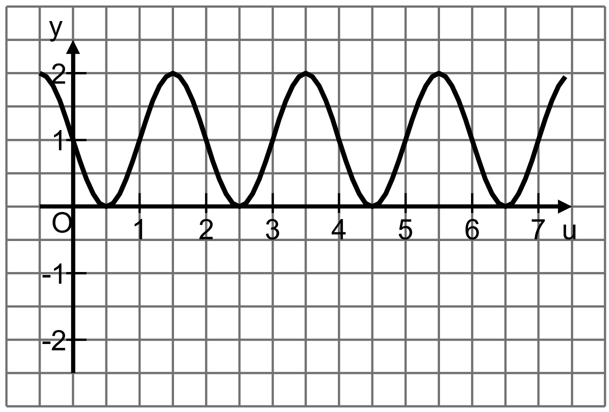
a) $e^x - \frac{3}{e^x} + 2 = 0$ b) $\sin(x) \cdot \cos(x) = 3\cos(x)$ für $0 \le x \le 2\pi$. (5VP)

4) Gib eine Funktionsgleichung an. (4VP)

a)



b)



5) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$. (4VP)

6) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$.

a) Zeige, dass E und g parallel sind.
b) Berechne den Abstand von g und E.
c) Bestimme einen Punkt der Ebene E, der von der Geraden g diesen Abstand hat. (5VP)

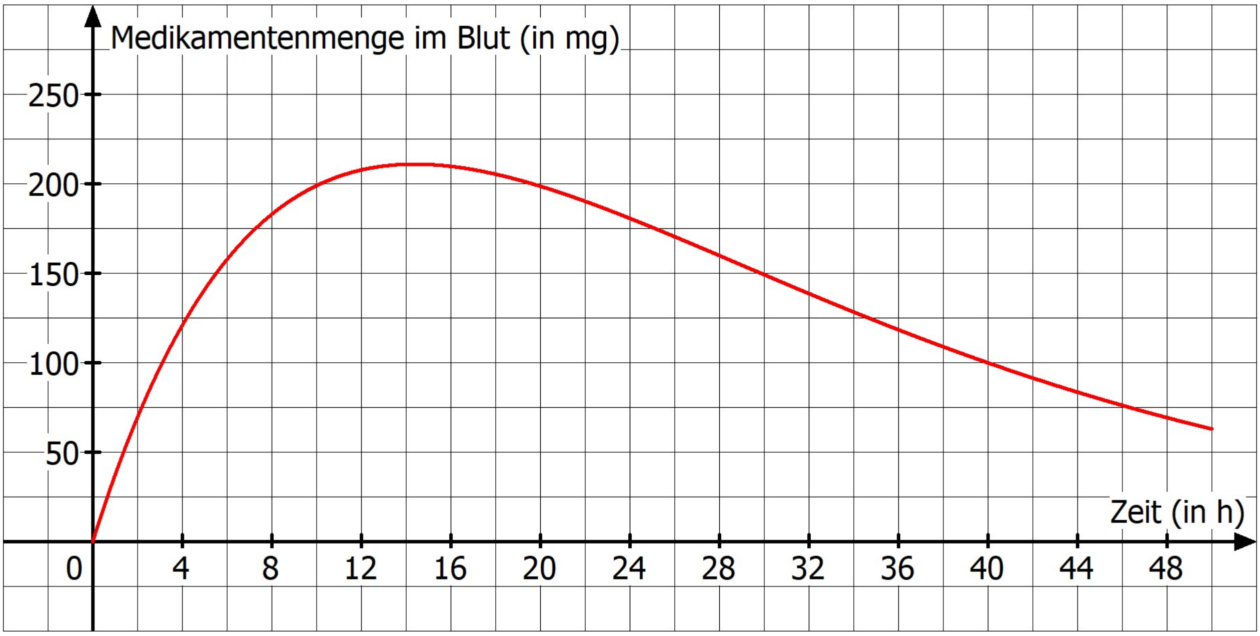
7) Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ und g mit $g(x) = x^2 - 3$.

a) Berechne $f(3)$, $g(f(3))$ und $f(g(3))$.
b) Für welche Werte für x ist die Verkettung $f(g(x))$ nicht definiert? (4VP)

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Medikament)

Wahlteil Analysis (mit WTR und Merkhilfe)

Aufgabe 1
Ein Patient nimmt 500mg eines Medikaments oral auf.
Die im Blut vorhandene Menge des Medikaments (in mg) in Abhängigkeit der Zeit (in Stunden) ab dem Einnahmezeitpunkt ($t = 0$) ist im unten stehenden Schaubild dargestellt.



(1) Nach welcher Zeit befindet sich die größte Menge des Medikaments im Blut? Wie groß ist diese Menge dann?

(2) Damit das Medikament wirkt, müssen mindestens 125mg im Blut vorhanden sein. Ab wann wirkt das Medikament und wie lange dauert die Wirkung an?

(3) Zeige, dass die Funktion $f(t) = 2000 \cdot \left(e^{-0{,}06t} - e^{-0{,}08t}\right)$ die Gleichung $f'(t) = -0{,}06 \cdot f(t) + 40 \cdot e^{-0{,}08t}$ erfüllt.

Aufgabe 2
Gegeben ist für jedes $t > 0$ die Funktion g_t durch $g_t(x) = t \cdot \cos(t \cdot x)$ mit dem Graphen C_t.

(1) Skizziere die Schaubilder C_1 und C_2 in einem Koordinatensystem. Wie wirkt sich eine Vergrößerung des Parameter t auf C_t aus?

(2) Das Schaubild von g_t und die x-Achse schließen im Bereich von $x = 0$ bis zur ersten Nullstelle bei $x_t = \frac{\pi}{2t}$ eine Fläche ein. Prüfe rechnerisch, ob der Flächeninhalt dieser Fläche von t abhängt.

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Medikament)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x)=4-\sin(x^2)\cdot 2x$ (2P) b) $f'(x)=5e^{5x-1}\cdot\sin(3x)+e^{5x-1}\cdot\cos(3x)\cdot 3$ (2P) **4P**

2) a) $\int_{\pi}^{2\pi}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\left[-2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{\pi}^{2\pi}=-2\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}+2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}=2$ (2P)

b) $\int_6^7\frac{2}{x-5}dx=\left[2\ln(x-5)\right]_6^7=2\ln(2)-2\underbrace{\ln(1)}_{=0}=2\ln 2$ (2P) **4P**

3) a) $e^x-\frac{3}{e^x}+2=0 \quad |\cdot e^x$

$\Leftrightarrow e^{2x}+2e^x-3=0$ Subst.: $u=e^x$

$\Rightarrow u^2+2u-3=0\Rightarrow u_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+3}$

$u_1=1$ oder $u_2=-3$ (3P)

$e^x=1$ oder $e^x=-3$

$\boxed{x=0}$ oder k. L.

b) $\sin(x)\cdot\cos(x)=3\cos(x)$

$\cos(x)\cdot(\sin(x)-3)=0$

$\cos(x)=0$ oder $\sin(x)=3$

$\boxed{x_1=\frac{\pi}{2};x_2=\frac{3\pi}{2}}$ oder k. L.

(2P) **5P**

4) a) $f(x)=2\sin(2x)$ (2P) b) $f(x)=\sin(\pi(x-1))+1$ (2P) **4P**

5) (1) RV: $k\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix}\left.\begin{matrix}\Rightarrow k=2\\\Rightarrow k=-6\\\Rightarrow k=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ Richtungsvektoren sind linear unabhängig (1,5P)

(2) Schnittpunkt: $\begin{matrix}\text{(I)} & -1s=1-2t\\ \text{(II)} & 2+s=1-6t\\ \text{(III)} & 1+2s=4t\end{matrix}$ (I)+(II): $2=2-8t\Leftrightarrow\boxed{t=0}$ in (I): $\Rightarrow\boxed{s=-1}$

t = 0 und s = -1 in (III): $1+2(-1)=4\cdot 0\Leftrightarrow -1=0\Rightarrow$ kein Schnittpunkt.

Aus (1) und (2) folgt: g und h sind windschief. (2,5P) **4P**

6) a) $\overrightarrow{m_g}\cdot\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=2-2=0\Rightarrow\overrightarrow{m_g}\perp\overrightarrow{n_E}\Rightarrow g\parallel E$ (1,5P)

b) P(3|-3|1) in HNF von E: HNF: $\frac{2x_1-x_2+2x_3-2}{3}=0\Rightarrow d(P;E)=\left|\frac{2\cdot 3+3+2\cdot 1-2}{3}\right|=3$ (2P)

c) Lotgerade: $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ in E: $2(3+2t)-(-3-1t)+2(1+2t)=2\Leftrightarrow t=-1$

$t=-1$ in l: $Q(1|-2|-1)$ in E. (1,5P) **5P**

7) a) $f(3)=\frac{1}{3-1}=\boxed{\frac{1}{2}}$ (1P) ; $g(f(3))=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=\frac{1}{4}-\frac{12}{4}=\boxed{-\frac{11}{4}}$ (1P) ;

$f(g(3))=f(3^2-3)=f(6)=\frac{1}{6-1}=\boxed{\frac{1}{5}}$ (1P)

b) $g(x)=1\Leftrightarrow x^2-3=1\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\boxed{x_{1/2}=\pm 2}$, da dann Nenner von f Null. (1P) **4P**

Summe: 30 Punkte

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Medikament)

Lösungen Wahlteil Analysis:

Aufgabe 1

(1) Maximum ca. : $H(14\,|\,210)$
$\Rightarrow$ Nach 14 Stunden maximale Menge mit 210mg.

(2) Einzeichnen von $y = 125$ Schnittstellen mit Funktion: $\Rightarrow t_1 \approx 4;\ t_2 \approx 34$
$t_2 - t_1 \approx 34 - 4 = 30$
$\Rightarrow$ Wirkung beginnt nach ca. 4 Stunden und hält ca. 30 Stunden an.

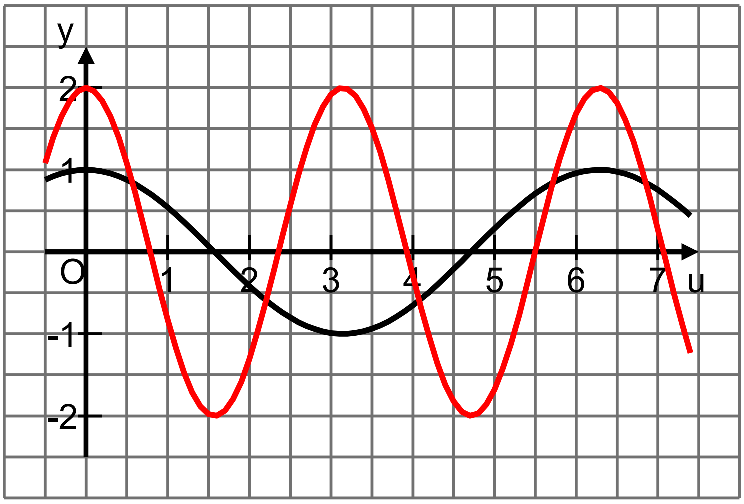
(3) Linke Seite: $f'(t) = 2000 \cdot \left(-0{,}06e^{-0{,}06t} + 0{,}08e^{-0{,}08t}\right) = -120e^{-0{,}06t} + 160e^{-0{,}08t}$

Rechte Seite: $-120 \cdot \left(e^{-0{,}06t} - e^{-0{,}08t}\right) + 40 \cdot e^{-0{,}08t} = -120e^{-0{,}06t} + 160e^{-0{,}08t}$

Linke Seite = Rechte Seite $\Rightarrow$ $f(t)$ $f(t)$ erfüllt die Gleichung

Aufgabe 2

(1)



$C_1; C_2$

Bei einer Vergrößerung von t wird die Amplitude größer, die Periode kleiner.

(2) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2t}} g_t(x)dx = \left[\sin(tx)\right]_0^{\frac{\pi}{2t}} = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 1$ unabhängig von t.